Ορισμός 1: Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f:\Omega\to R$ ικανοποιεί μια **συνθήκη Lipschitz ως προς** y, όταν υπάρχει σταθερά $k>0$ έτσι ώστε για κάθε $(x,y_1)\in\Omega$, $(x,y_2)\in\Omega$ να ισχύει

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<k|y_1-y_2|. \quad (*)$$

- Δείξτε ότι το ακόλουθο προβλήμα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση:

$y'=|x+\sin y|$, $y(0)=0$

Λυση

Δοθέντος ότι η συνάρτηση $f(x,y):=|x+\sin y|$ ορίζεται σε όλο το R^2 ενώ το σημείο αρχικών τιμών είναι το $(x_0,y_0)=(0,0)$, μπορούμε να θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού της f το ορθογώνιο $\Delta:=[-a,a]\times[-b,b]$ με $a,b>0$. Για να αποδείξουμε ότι το δοθέν πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση αρκεί, με βάση το Θεώρημα 3, να δείξουμε ότι η $f(x,y)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο Δ.

Πράγματι, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\big||x+\sin y_1|-|x+\sin y_2|\big|\le|(x+\sin y_1)-(x+\sin y_2)|=|\sin y_1-\sin y_2|$$

και άρα με την βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin y_1-\sin y_2\equiv 2\sin\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)\cos\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

και της γνωστής ανισότητας

$$|\sin\theta|\le|\theta|,\ \theta\in R,$$

παίρνουμε ότι για κάθε $(x,y_1),(x,y_2)\in\Delta$ είναι

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le 2\left|\sin\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)\cos\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right|\le 2\left|\sin\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|\le|y_1-y_2|.$$

Πρόταση: Έστω Ω ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του R^2 και συνάρτηση $f:\Omega \to R$ συνεχής. Αν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο Ω και είναι φραγμένη, με φράγμα k, τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

με $(x_0, y_0) \in \Omega$. Έστω επίσης ορθογώνιο $\Delta := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ το οποίο είναι υποσύνολο του Ω και έχει κέντρο το σημείο (x_0, y_0).

Θεώρημα (Υπαρξη λύσης -- (E. Picard - E. Lindelof))

Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ είναι συνεχής και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς y στο Δ τότε υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $y(x)$ η οποία είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1), (2), ορισμένη σ' ένα διάστημα $I := [x_0 - h, x_0 + h]$, όπου $h := \min\left\{a, b/M\right\}$ και $M := \max_{(x,y)\in\Delta} |f(x,y)|$

- $y' = e^x + \cos(xy)$, $y(0) = 0$

  Λύση

  Δοθέντος ότι η συνάρτηση $f(x,y) := e^x + \cos(xy)$ ορίζεται σε όλο το R^2 ενώ το σημείο αρχικών τιμών είναι το $(x_0, y_0) = (0,0)$, μπορούμε να θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού της f το ορθογώνιο $\Delta := [-a, a] \times [-b, b]$ με $a, b > 0$. Για να αποδείξουμε ότι το δοθέν πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση αρκεί, με βάση το Θεώρημα 3, να δείξουμε ότι η $f(x,y)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο Δ.

  Αυτό όμως ισχύει, σύμφωνα με την Πρόταση 1, αφού

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x \sin(xy)| \le |x| \le a$$, για κάθε $(x,y) \in \Delta$.